15 ЛЕКЦИЯ_ ҰЙЫТҚУ ТЕОРИЯСЫ

Ұйытқу теориясына кіріспе

Ұйытқу теориясы механика контекстінде енгізілген ғылыми ұғым болып табылады және ол - бұл сыртқы күштердің әсерінен жүйе параметрлерінің өзгеруі және т.б. табиғи әсерден пайда болуы мүмкін идеалды немесе нақты жүйеден ауытқулар ретінде түсіндіріледі. Ұйытқу теориясын қолдану аясы кең, сондай-ақ оның қажеттілігіне тоқталсақ, әдетте тербелістерді аналитикалық жолмен шешу қиын болуы мүмкін, сондықтан мұндай теорияс оны талдау және шешудің арнайы әдістерін ұсынады. Тарауда ұйытқу теориясының негізінде жатқан басты принциптер мен тәсілдер, мысалы шағын параметрдегі жіктеу, итерация әдісі, пертурбация әдісі және т.б.

Қозғалыс теңдеулері қарапайым функцияларға тәуелді болатын шешімдерге ие Гамильтониандар нақты есептерде сирек кездеседі. Сондықтан осындай есептерді шешу үшін жуықтау әдістерін қолдану өте тиімді болып табылады. Осындай жуықтаулардың бірін Гамильтонианы мына түрде берілген жүйелерге қолданып көрелік

$$H(q,p) = H_0(q,p) + \varepsilon H_1(q,p) \qquad (|\varepsilon| \prec\prec 1), \tag{1}$$

мұндағы $H_0(q,p)$-үшін жүйенің нақты шешімі бар, ал $\varepsilon \neq 0$ болған жағдайда $H(q,p)$ жүйенің шешімі жоқ болып табылады. Сонымен, *ұйытқу теориясы* деп аналитикалық шешімі белгісіз күрделі физикалық есептерді жуықтап шешудің тәсілін айтады. Бұл тәсіл қарастырылып отырған теңдеуді соған жақын, бірақ одан гөрі қарапайым әрі шешімі белгілі теңдеуге келтіруге негізделген. Гамилтонианы $H_0(q,p)$ болатын қарапайым есеп *ұйытқусыз* есеп деп, ал гамильтонианы $H(q,p)$ және $\varepsilon H_1(q,p)$ қарастырылатын теңдеулер жүйесіндегі ұйытқусыз есептен өзге мүшелері *ұйытқу* деп аталады. Айта кетсек, біз ұйытқуды ε ның функциясы ретінде қарастырдық және ол физикалық жүйеге әсер ететін ұйытқу шамасы аз болғанда қолданылады. Бұл теорияны пайдаланғанда алдымен ұйытқуы жоқ жүйені сипаттайтын қарапайым теңдеудің шешімі табылады да, содан кейін ол шешімге ұйытқуды ескеретін қосымша түзетулер енгізіліп, әрі қарай түзетілген шешім келесі қосымша түзетуді есептеуге пайдаланылады. Осы процесс есептің шешімі берілген дәлдікті қанағаттандырғанша бірнеше рет қайталанады.

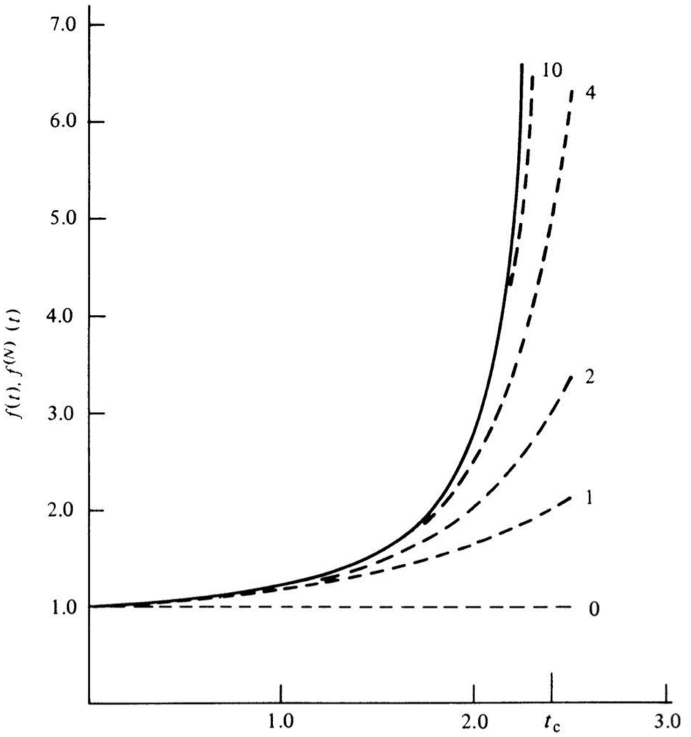
Ұйытқу теориясы алғаш рет аспан механикасында Күн жүйесіндегі үш дененің өзара әсерлесіп қозғалуын зерттейтін есепті шешуге қолданылды. Бұл жағдайда, белгілі бір планетаға Күннің әсері басым болады да, ал барлық басқа планеталардың әсері азырақ болады. Мысалы, Шолпанның Күнді айнала қозғалысына ең көп ұйытқу Юпитер тарапынан болса, оның Шолпандағы орташа күші Күндікінен 2×10^{-5} есе аз; келесі ең күшті ұйытқуы Жерге байланысты, ал оның орташа күші Күндікінен 4×10^{-6} есе аз болып табылады. Осылайша, Шолпанның қозғалысына бірінші жуықтау ретінде біз Күндікінен басқа барлық әсерлерді елемеуіміз мүмкін. Бұл қозғалыс теңдеулері қарапайым шешімдері бар Гамильтонианды береді. Юпитердің және басқа планеталардың әсерін бұл қозғалысқа аздаған ұйытқуы ретінде қарастыруға болады. Дегенмен бұл жағдайда, еркіндік дәрежелері жоғары күрделі жүйе ретінде қарастырылады, ал біздің мысалдарымыз әлдеқайда қарапайым жүйелерге арналғанын білуіміз қажет.

Ұйытқу теориясының негізгі идеясы болып шешімді ε -дегі дәрежелік қатарға дейін арттыру болып табылады. Бұл $f(x)$ функциясының x мәні маңында Тейлор қатарына жіктеуге сәйкес келеді:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x) + \cdots \qquad (2)$$

Тейлор қатарындағы сияқты, егер ε тым үлкен болса, ұйытқу қатары диверсификациялануы мүмкін немесе шын мәнінде барлық ε үшін алшақтауы мүмкін. Сондықтан оны қолдануда ұқыптылық қажет.

Гамильтондық жүйелер үшін екі түйіндес айнымалылар да осындай дәрежелік қатарға жіктелуі керек; демек, алынған өрнек өте күрделі және маңызды идеяларды көрсете алмауы да мүмкін. Бұл идеяларды тым көп есептеулерге араласпай-ақ көрсету үшін біз алдымен теорияны және одан туындайтын кейбір қиындықтарды көрсететін қарапайым мысалдарды қарастырып көрелік.



Сурет 45. (1.13) теңдеудегі дербес $f(t)$ -ны (тұтас сызық) және (1.14) теңдеудегі жуықталған дербес $f^{(N)}(t)$ (үзік сызық) функциясы салыстыру графигі

Консервативті Гамильтондық жүйелер үшін бірінші ретті ұйытқу теориясы

Гамильтониан екі құраушыдан тұрады делік:

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \varepsilon H_1(q, p), \tag{3}$$

мұндағы H_0 үшін Гамильтон теңдеуі белгілі шешімге және оның εH_1 ұйытқуы үшін анағұрлым аз мәні.

Ұйытқу теориясында Гамильтон теңдеулерінің шешімін 1-мысалдағыдай дәрежелік қатар ретінде ε арқылы өрнектейміз. Бұл ұйытқымаған қозғалыстың таралуы болғанымен, ұйытқыған қозғалыс екеуі де айналу немесе екі либрация болып табылатын бір типте болуы керек.

Мысалы, тік маятниктің Гамильтонианы қарастырайық

$$H(\psi, p) = \frac{1}{2}p^2 - \alpha^2 \cos\psi, \tag{4}$$

бұл 2-суретте фазалық қисықтар арқылы көрсетілген. Фазалық s кеңістігі айналу аймақтарына және либрация аймақтарына бөлінеді.

Жылдам айналымдар үшін:

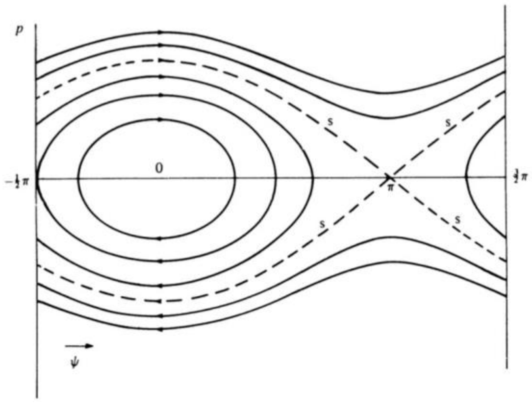
$$\frac{1}{2}p^2 \succ\succ \alpha^2, \tag{5}$$

потенциалдық энергия мүшесі салыстырмалы түрде аз және біз оны мына түрде болатындай етіп таңдап аламыз.

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2, \varepsilon H_1 = -\alpha^2 \cos\psi. \tag{6}$$

Екінші жағынан, 0-дегі тепе-теңдік нүктесіне жақын либрацияны зерттеу үшін біз гамильтонианды келесідей жазамыз:

$$H(\psi, p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \alpha^2\psi^2\right) - \alpha^2 - \alpha^2\left(\cos\psi - 1 + \frac{1}{2}\psi^2\right), \tag{7}$$



Сурет 46. Тік маятниктің фазалық диаграммасы. s бөлгіш (сепаратриса) либрация аймағын O центрінде орналасқан жабық қисықтарды айналу аймақтарынан бөледі.

сондықтан α^2 тұрақтысын елемей, бізде әртүрлі ұйытқыған және ұйытқымаған Гамильтониандар болады

$$\overline{H}_0 = \frac{1}{2}\left(p^2 + \alpha^2\psi^2\right) \quad \text{and} \quad \varepsilon\overline{H}_1 = -\alpha^2\left(\cos\psi + \frac{1}{2}\psi^2\right) \tag{8}$$

Үзіліссіз қозғалыс сызықтық осцилляторға ұқсағандықтан, оны бізге таныс «маятник қозғалысы» қарастыруға болады.

Енді жалпы талдауды тек ε бірінші ретке дейін жалғастырамыз. Бұл айналдыруға да, либрацияға да қатысты. Фазалық кеңістіктің H және H_0 қисықтары бір-біріне үздіксіз деформациялануы мүмкін аймақ бар деп есептейміз. Біз сондай-ақ $(\emptyset, J)$ ескі бұрыштық әрекет айнымалылары H_0 және (θ, I) жаңа айнымалылар H бір-бірімен ε бойынша қуат қатарына ыдырау арқылы байланысуы мүмкін деп болжаймыз:

$$\phi = \phi^{(0)}(\theta, \mathrm{I}) + \varepsilon\phi^{(1)}(\theta, \mathrm{I}) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right) \tag{9}$$

$$J = J^{(0)}\left(\theta, \mathrm{I}\right) + \varepsilon J^{(1)}(\theta, \mathrm{I}) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)\Big), \tag{10}$$

Мұндағы әрбір $((\phi,^{k}, J^{k})$ [s - ε тәуелсіз .

Біз (ϕ, J) ескі бұрыштық әрекет айнымалыларын жаңаларымен (θ, I) өрнектеуді шештік, өйткені бұзылған қозғалыс үшін I = тұрақты және $\theta = \Omega t\ +$ тұрақты, мұндағы Ω - ұйытқыған жиілік. (33.7, 33.8) ыдырау және жиілік белгілі болғаннан кейін (ϕ,J) уақытқа тәуелділігі белгілі, сондықтан θ фазалық қисығы немесе t арқылы параметрлік түрде анықталады.

Ұйытқымаған жүйе үшін $\varepsilon = 0$, $\theta = \phi$ және $\mathrm{I} = \mathrm{J}$, сәйкесінше,

$$\begin{aligned} \phi^{(0)} &= \left(\theta, \mathrm{I}\right) = \theta \\ J^{(0)}\left(\theta, \mathrm{I}\right) &= \mathrm{I} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \left(1+\varepsilon\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta}\right)\left(\mathrm{I}+\varepsilon J^{(1)}\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)=$$
$$= \mathrm{I}+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta J^{(1)}+\mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right), \tag{12}$$

келесі жол соңғы, себебі $\phi^{(1)}$ периодты. Осылайша,

$$\int_0^{2\pi} d\theta J^{(1)}(\theta,\mathrm{I})=0 \tag{13}$$

және θ бойынша орташа (8.32) аламыз

$$K_1(\mathrm{I})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta H_1(\theta,\mathrm{I}). \tag{14}$$

Бұл *Гамильтонианға бірінші ретті түзету ұйытқымаған қозғалыс арқылы қабылданған* εH_1 *ұйытқуының орташа мәні* екенін көрсетеді. K_1 қазір белгілі болғандықтан, $J^1(\theta, I)$ тікелей (8.32) ішінен таба аламыз:

$$J^{(1)}=\frac{K_1(\mathrm{I})-H_1(\theta,\mathrm{I})}{\omega_0(\mathrm{I})}\left(\omega_0(\mathrm{I})\neq 0\right) \tag{15}$$

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5